

10. LIMITA POSLOUPNOSTI (4)

1. Spočítejte limitu limitu rekurentně zadané posloupnosti $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$.
2. Spočítejte limitu limitu rekurentně zadané posloupnosti $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$.
3. Necht' $a \in [0, 1]$. Spočítejte limitu rekurentně zadané posloupnosti $x_1 = 0$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2)$.
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} - \sqrt{3^n + 2^n}}$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sin^2 n} - \sqrt{n - \cos^2 n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right)$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right)$
8. Sestrojte omezenou posloupnost $\{a_n\}$ takovou, že neexistuje $\max\{a_n; n \in \mathbf{N}\}$ ani $\min\{a_n; n \in \mathbf{N}\}$.
9. Rozhodněte o platnosti následujícího tvrzení: Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost kladných reálných čísel a pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Potom $\lim a_n = 0$.
10. Charakterizujte všechny posloupnosti $\{a_n\}$, pro které platí

$$\lim a_n = \lim \frac{a_n^2 + 1}{a_n}.$$

VÝSLEDKY

1. 2 2. 1 3. $\sqrt{a}$ 4. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 5. $\frac{1}{2}$ 6. 3 7. $\frac{1}{2}$